DOI:10.16152/j.cnki.xdxbzr.2008.02.001
西北大学学报(自然科学版)
2008年4月,第38卷第2期,Apr.,2008,Vol.38,No.2
Journal of Northwest University (Natural Science Edition)
JNWU

·数理科学与信息科学·

关于F.Smarandache函数的两个问题

张文鹏

(西北大学 数学系,陕西 西安 710069)

摘要:目的 研究两个包含Smarandache函数$S(n)$及伪Smarandache函数$Z(n)$方程的可解性。方法 利用初等及解析方法。结果 证明了方程$Z(n)=S(n)$及$Z(n)+1=S(n)$有无穷多个正整数解,并给出了所有解的具体形式。结论 将Kenichiro Kashihara在文献[2]中提出的两个问题得到彻底解决。

关 键 词:Smarandache函数;伪Smarandache函数;方程;正整数解
中图分类号:O156.4 文献标识码:A 文章编号:1000-274X(2008)02-0173-04

1 引言及结论

对任意正整数n,著名的F.Smarandache函数$S(n)$定义为最小的正整数m使得$n\mid m!$。即$S(n)=\min\{m: m\in N, n\mid m!\}$。从$S(n)$的定义人们容易推出如果$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$表示$n$的标准分解式,那么$S(n)=\max_{1\leqslant i\leqslant r}\{S(p_i^{\alpha_i})\}$。由此不难计算出$S(1)=1$,$S(2)=2$,$S(3)=3$,$S(4)=4$,$S(5)=5$,$S(6)=3$,$S(7)=7$,$S(8)=4$,$S(9)=6$,$S(10)=5$,$S(11)=11$,$S(12)=4$,$S(13)=13$,$S(14)=7$,$S(15)=5$,$S(16)=6$,…。关于$S(n)$的算术性质,许多学者进行了研究,获得了不少有趣的结果[1-5]。例如,Yu Yaming研究了一类包含$S(n)$方程的可解性[3],证明了该方程有无穷多组正整数解,即证明了对任意正整数$k\geqslant 2$,方程

$$S(m_1+m_2+\cdots+m_k)=S(m_1)+S(m_2)+\cdots+S(m_k)$$

有无穷多组正整数解$(m_1, m_2, \cdots, m_k)$。

Jozsef Sandor[4]进一步证明对任意正整数$k\geqslant 2$存在无穷多组正整数$(m_1, m_2, \cdots, m_k)$满足不等式

$$S(m_1+m_2+\cdots+m_k)>S(m_1)+S(m_2)+\cdots+S(m_k)。$$

同时,又存在无穷多组正整数$(m_1, m_2, \cdots, m_k)$满足不等式

$$S(m_1+m_2+\cdots+m_k)<S(m_1)+S(m_2)+\cdots+S(m_k)。$$

此外,徐哲峰获得了有关$S(n)$的一个深刻结果[5]。即证明了渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}(S(n)-P(n))^2=\frac{2\zeta\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right)。$$

其中$P(n)$表示n的最大素因子,$\zeta(s)$表示Riemann Zeta函数。

现在定义另一个算术函数$Z(n)$为

$$Z(n)=\min\left\{m: m\in N, n\mid\frac{m(m+1)}{2}\right\}。$$

该函数有时也被称为伪Smarandache函数。关于它的初等性质,虽然我们至今知道的不多,但是也有不少人进行过研究,获得了一些有价值的理论研究成果[6-8]。其中,特别在文献[9]的第3章中,Kenichiro Kashihara论述了函数$Z(n)$的一些初等性质,同时也提出了下面两个问题:

(A)求方程$Z(n)=S(n)$的所有正整数解;

(B)求方程$Z(n)+1=S(n)$的所有正整数解。

收稿日期:2007-12-05特约
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10671155)
作者简介:张文鹏(1958-),男,陕西礼泉人,西北大学教授,从事数论研究。

本文的主要目的是利用初等方法研究方程(A)及(B)的可解性,并获得了这两个方程的所有正整数解,具体地说,即证明了下面的定理。

定理 1　对任意正整数 $n>1$,函数方程

$$Z(n)=S(n)$$

成立当且仅当 $n=p\cdot m$,其中 p为奇素数,m为$\frac{p+1}{2}$的任意大于 1的因数。即 $m\mid\frac{p+1}{2}$且 $m>1$。

定理 2　对任意正整数 n,函数方程

$$Z(n)+1=S(n)$$

成立当且仅当 $n=p\cdot m$,其中 p为奇素数,m为$\frac{p-1}{2}$的任意因数。即 $m\mid\frac{p-1}{2}$。

显然,我们的定理彻底解决了问题(A)及(B)。亦即证明了这两个方程都有无穷多个正整数解,并给出了它们每个解的具体形式。其中,特别在区间[1,100]中,方程 $Z(n)=S(n)$有 9个解,它们分别是 $n=1,6,14,15,22,28,33,66,91$。对于问题(B),显然方程 $Z(n)+1=S(n)$在区间[1,50]中有 19个解,它们分别是 $n=3,5,7,10,11,13,17,19,21,23,26,29,31,34,37,39,41,43,47$。

2　定理的证明

利用初等方法给出定理的直接证明。

首先证明定理 1。事实上,当 $n=1$时,方程 $Z(n)=S(n)$成立。当 $n=2,3,4,5$时,显然不满足方程 $Z(n)=S(n)$。于是,假定 $n\geqslant 6$且满足方程 $Z(n)=S(n)$,不妨设 $Z(n)=S(n)=k$,由函数 $Z(n)$及 $S(n)$的定义可知,k是最小的正整数,使得 n满足下面的两个整除式:

$$n\mid\frac{k(k+1)}{2},\quad n\mid k!。\tag{1}$$

首先,证明在式(1)中 $k+1$不可能为素数。事实上如果 $k+1$为素数,不妨设 $k+1=p$,于是在 $n\mid\frac{p(p-1)}{2}$中当$(n,p)=1$时,立刻推出 $n\mid\frac{p-1}{2}$。从而 n整除$\sum_{i=1}^{p-2}i=\frac{(p-1)(p-2)}{2}$。这与 $k=p-1$为最小的正整数使得 $n\mid\frac{k(k+1)}{2}$矛盾!当$(n,p)>1$时,由于 p为素数,所以推出 $p\mid n$。再由于 $n\mid k!$,立刻得到 $p\mid k!$。这是不可能的,因为 $p=k+1$,所以 p不可能整除$(p-1)!$,从而证明了在式(1)中 $k+1$不可能为素数。

其次,证明在式(1)中当 k为奇数时 k一定为素数。事实上当 k为奇数时$\frac{k+1}{2}$为整数,若 k为合数,则当 k可以分解成两个不同整数的乘积时,不妨设 $k=a\cdot b$,$a>1$,$b>1$且 $a\neq b$,于是注意到$(k,\frac{k+1}{2})=1$,不难推出 $k=a\cdot b\mid(k-1)!$,$\frac{k+1}{2}\mid(k-1)!$。再由于 n整除$\frac{k(k+1)}{2}$立刻推出 $n\mid(k-1)!$。这与 k是最小的正整数使得 $n\mid k!$矛盾。当 k为合数且为某一素数的方幂时,设 $k=p^{\alpha}$且 $\alpha\geqslant 2$。由于 k为奇数,所以 $p\geqslant 3$,从而 $p,2p,\cdots,p^{\alpha-1}$均小于 $k-1$且每个数都整除$(k-1)!$,于是由 n整除$\frac{k(k+1)}{2}$仍然可以推出 $n\mid(k-1)!$。这与 k的定义矛盾,所以当 k为奇数时一定为素数。

结合以上两种情况推出当 k为奇数时有 $k=p$,此时 n整除 $p!$及 n整除$\frac{p(p+1)}{2}$。但是当 n整除$\frac{p+1}{2}$时,显然有 $S(n)<p$,当 $n=p$时 $Z(n)\neq S(n)$。所以可以设 $n=p\cdot m$,其中 m是$\frac{p+1}{2}$的任一大于 1的因素。

现在证明当 $n=p\cdot m$,其中 m是$\frac{p+1}{2}$的任一大于 1的因数时,一定有 $Z(n)=S(n)$。事实上此时显然有 $S(pm)=S(p)=p$,因为 m不整除$\sum_{i=1}^{p-1}i=\frac{p(p-1)}{2}$,否则与 m整除$\frac{p+1}{2}$矛盾!所以 $Z(pm)=p$,从而 $Z(pm)=S(pm)$。

最后,证明不存在偶数 k使得 $Z(n)=S(n)=k$。我们用反证法来证明这一结论。假定存在偶数 $k=2m$,使得 $Z(n)=S(n)=k=2m$,则由函数 $Z(n)$及 $S(n)$的定义可知,n整除$\frac{k(k+1)}{2}=m(2m+1)$及$(2m)!$。由前面的分析可知 $2m+1$不可能为素数,否则当$(n,2m+1)=1$时,n整除$\sum_{i=1}^{2m-1}i=m(2m-1)$,显然这与 $2m$是最小的正整数使得 n整除 $m(2m+1)$矛盾!当$(n,2m+1)>1$时,由素数的性质立刻推出 $p=2m+1\mid n$,从而再由 $n\mid(2m)!$得到 $p=2m+1\mid(2m)!$,矛盾!所以 $2m+1$不可能为素数,同样可以证明 m不可能为合数,否则容易推出

$n\mid(2m-1)!$，与 $2m$ 是最小的正整数使得 $n\mid(2m)!$ 矛盾！从而 m 为素数 p，$k=2p$。于是可得 $n\mid p(2p+1)$ 及 $n\mid(2p)!$，$S(n)=Z(n)=2p$。但是，当 n 等于 $p(2p+1)$ 的任一因素时都是不可能的！也就是说对任意 $k\mid p(2p+1)$，不可能有 $S(k)=2p$。于是，完成了定理 1的证明。

现在证明定理 2。与定理 1的证明方法相似，这里只给出大概过程。假定正整数 n 满足方程 $Z(n)+1=S(n)$，并设 $Z(n)+1=S(n)=k$，于是由函数 $Z(n)$ 及 $S(n)$ 的定义不难推出 k 是最小的正整数，使得

$$n\mid\frac{k(k-1)}{2},\quad n\mid k!。\qquad(2)$$

显然，式 (2)中当 k 为奇数时一定为素数！否则可难出 $n\mid(k-1)!$，与 k 是最小的正整数使得 $n\mid k!$ 矛盾。因此 $k=p$ 为一素数。再由 $n\mid\frac{p(p-1)}{2}$ 并注意 $S\left(\frac{p-1}{2}\right)<p$ 立刻推出 $n=p\cdot m$，m 为 $\frac{p-1}{2}$ 的任一正因数。容易验证当 $n=p\cdot m$，m 为 $\frac{p-1}{2}$ 的任一正因数时，n 满足方程 $Z(n)+1=S(n)$。

当式 (2)中 $k=2m$ 为偶数时，$k-1=2m-1$ 一定为素数，从而可知不存在这样的正整数 n，使得 $Z(n)+1=S(n)=2m$。所以，方程 $Z(n)+1=S(n)$ 成立当且仅当 $n=p\cdot m$，其中 m 为 $\frac{p-1}{2}$ 的任一正因数。于是，完成了定理 2的证明。

3　一些相关的问题

关于 Smarandache函数 $S(n)$ 及伪 Smarandache函数 $Z(n)$ 性质的研究虽然取得了不少进展，但是仍然存在不少问题。为了便于有兴趣的读者进行参考和进一步研究，这里介绍一些与函数 $S(n)$ 及 $Z(n)$ 有关的，并且作者认为有意义的问题。

问题 1　对任意正整数 n，设 $H(n)$ 表示区间 $[1, n]$ 中所有使 $S(n)$ 为素数的正整数的个数。试研究 $H(n)$ 的渐近性质。猜测：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{H(n)}{n}=1。$$

问题 2　最多有有限个正整数 n，使得

$$\sum_{d\mid n}\frac{1}{S(d)}$$

为整数，其中 $\sum_{d\mid n}$ 表示对 n 的所有正因数求和。进一步猜测上式为整数当且仅当 $n=1, 8$。

问题 3　研究函数 $\frac{S(n)}{P(n)}$ 及 $\frac{P(n)}{S(n)}$ 的均值性质，并给出均值

$$\sum_{n\le x}\frac{S(n)}{P(n)},\ \sum_{n\le x}\frac{P(n)}{S(n)}$$

的一个渐近公式，其中 $P(n)$ 表示 n 的最大素因子。当 x 趋于无穷时，猜测第一个均值渐近于 $c\cdot x$，其中 c 为某一大于 1的常数；第二个均值应该与 x 同阶。当然问题 3与问题一密切相关。如果问题一中的猜测正角，那么就可以获得第二个均值的渐近公式。

问题 4　函数 $Z(n)$ 的值分布很不规则，对有些 n 如 $n=\frac{m(m+1)}{2}$，有 $Z(n)=m<\sqrt{2n}$，而对于另一些 n 如 $n=2^{\alpha}$，有 $Z(n)=2^{\alpha+1}-1=2n-1$。因此，有必要研究 $Z(n)$ 的均值性质，给出均值

$$\sum_{n\le x}Z(n),\ \sum_{n\le x}\ln(Z(n)),\ \sum_{n\le x}\frac{1}{Z(n)}$$

的一个渐近公式。

问题 5　求方程 $Z(n)=\varphi(n)$ 的所有正整数解，其中 $\varphi(n)$ 为 Euler函数。这一方程有无限多个正整数解，例如当 n 为素数 p 时均满足方程。当 $n=2p$ 且 $p\equiv1\pmod 4$ 时，n 也满足该方程。除了这些平凡解外，是否还有其他正整数解是一个公开的问题。猜测该方程只有 $n=1$ 以及上述两种解。

问题 6　求方程 $S(Z(n))=Z(S(n))$ 的所有正整数解。猜测该方程最多有有限个正整数解。

参考文献：

[1]　SMARANDACHE F. Only Problems, Not Solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2]　WANG Yong-xing. On the Smarandache function[J]. Research on Smarandache Problem in Number Theory, 2005, 2: 103-106.

[3]　LU Yaming. On the solutions of an equation involving the Smarandarche function[J]. Scientia Magna, 2006, 2(1): 76-79.

[4]　SANDOR J. On a dual of the Pseudo-Smarandache function[J]. Smarandache Notions (Book Series), 2002, 13: 16-23.

[5]　徐哲峰. 关于 Smarandache函数的值分布[J]. 数学学报(中文版), 2006, 49(5): 1 009-1 012.

[6]　LE Mao-hua. Two function equations[J]. Smarandache Notions Journal, 2004, 14: 180-182.

[7]　GORSKI D. The pseudo-Smarandache functions[J]. Smarandache Notions J, 2000, 12: 140-145.

[8]　SANDOR J. On additive analogues of certain arithmetic function[J]. Smarandache Notions J, 2004, 14: 128-132.

[9] KASHIHARA K. Comments and topics on Smarandache notions and problems[M]. New Mexico: Erhus University Press, 1996.

[10] 张文鹏. 初等数论[M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 2007.

(编 辑 亢小玉)

On two problems of the Smarandache function

ZHANG Wen-peng

(Department of Mathematics, Northwest University, Xi′an 710069, China)

Abstract: Aim To study the positive integer solutions of two equations involving the Smarandache function S(n) and the pseudo Smarandache function Z(n). Methods Using the elementary and analytic methods. Results It was proved that the equations Z(n) = S(n) and Z(n) + 1 = S(n) have infinite positive integer solutions, and exact forms of all positive integer solutions were given. Conclusion The two problems wers solved, which were which proposed by Kenichiro Kashihara in reference [2].

Key words: the Smarandache function; the pseudo Smarandache function; equation; positive integer solution

·学术动态·

我校科研成果突出者受到学校表彰奖励

2008年3月7日,我校召开了2007年科研工作总结奖励大会,表彰奖励了获得2006年度高等学校科学技术一等奖的罗晓荣教授、入选第一届“中国百篇最具影响优秀国际学术论文”的舒德干教授等一批教师、科研工作者。校党政领导张炜、孙勇等出席了大会。

这次奖励范围包括: 2006年度各级科技奖; 优秀学术论文奖; 各类重点项目奖; 科研成果配套奖等四个方面,奖励综合了科研工作从立项到成果转化,从基础理论到应用开发的方方面面。今年学校共奖励180.58万元, 255人次受到表彰奖励,奖励的覆盖面之大,获奖人员之多,充分反映出学校对科技工作的高度重视和大力支持。

孙勇校长在讲话中说,从2007年各种奖项来看,我校不论在基础研究及高新技术研究、人才团队、科研基地建设、高水平论文方面,还是产学研合作与服务地方经济和人文社科研究等都取得了很好的成绩。这些成绩的取得,得益于国家尊重科学、尊重知识、尊重人才的好政策,也是近年来学校不断加强学科建设,广大教师、科技工作者发扬自强不息的精神,辛勤努力、辛勤工作的结果。根据我校目前科研状况,搞好今年的科研工作一定要强调站在国家发展的战略高度,瞄准世界科技文化发展趋势,主动适应国家、地方经济建设和社会发展需要,坚持科学研究与学科建设、高层次人才培养相结合;坚持自然科学与人文社会科学研究并重,重视基础研究、强化应用与技术开发研究,加速科技成果和高新技术,产业化,突出特色,集成优势,实现文、理、工多学科共同繁荣,相互促进、协同发展,从而推动学校科研工作的进步。

朱恪孝副校长在工作报告中认为,2007年以来,我校科研工作坚持贯彻落实国家中长期科技发展规划精神,紧紧抓住国家“十一五”科技计划和西部大开发的重大机遇,坚持自由探索科学前沿、服务国家战略需求、推动地方经济发展三者相结合,以重大项目、团队建设、基地建设为重点,通过政策导向和环境创造,全面提升创新能力,实现了学校科技工作新的跨越。截至2007年12月底,全校到校科研经费1.18亿元,与2006年同比增长了31%。科研成果产出数量和水平大幅提高,一批成果在全国、全省获奖。2008年我校科研工作将本着“突出特色,强化优势,促进交叉,提高内涵”的原则和“创新体制,整合资源,加强重点,和谐发展”的工作思路开展,努力使我校的科技工作再上一个新台阶。

李映方副书记宣读了学校的奖励决定,校领导分别为荣获重大科研项目奖的张国伟院士等107人、荣获优秀学术论文奖的舒德干教授等142人、荣获科研成果配套奖的史真教授等7人颁奖。

(薛 鲍)